

# 一种基于复合混沌映射的压缩感知测量矩阵构造方法研究

周 伟<sup>1</sup>, 景 博<sup>1</sup>, 张 航<sup>2</sup>, 黄以锋<sup>1</sup>, 李 娟<sup>1</sup>

(1. 空军工程大学航空航天工程学院, 陕西西安 710038; 2. 北京机电工程研究所, 北京 100074)

**摘 要:** 针对常用随机测量矩阵存在硬件实现困难的不足, 提出一种基于复合混沌映射的压缩感知确定性测量矩阵构造方法. 首先基于 Logistic 映射和 Tent 映射构造随机性和初值敏感性更强的复合混沌映射, 然后将复合混沌迭代序列经大间隔采样后进行线性变换得到的结果作为拟构造测量矩阵中的元素, 并从理论上证明了该矩阵元素具有非常低的相关性. 同时理论证明了所构造复合混沌测量矩阵能以高概率满足压缩感知约束等距性. 实验结果表明, 所构造复合混沌测量矩阵的性能优于 Toeplitz 测量矩阵及 Logistic 映射测量矩阵, 与高斯随机测量矩阵的性能相仿.

**关键词:** 压缩感知; 测量矩阵; 混沌映射; 约束等距性

**中图分类号:** TP212.9      **文献标识码:** A      **文章编号:** 0372-2112 (2017)09-2177-07

**电子学报 URL:** <http://www.ejournal.org.cn>      **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2017.09.018

## Construction of Measurement Matrix in Compressive Sensing Based on Composite Chaotic Mapping

ZHOU Wei<sup>1</sup>, JING Bo<sup>1</sup>, ZHANG Hang<sup>2</sup>, HUANG Yi-feng<sup>1</sup>, LI Juan<sup>1</sup>

(1. School of Aeronautic & Astronautic Engineering, Air Force Engineering University, Xi'an, Shaanxi 710038, China

2. Beijing Research Institute of Mechanical and Electrical Engineering, Beijing 100074, China)

**Abstract:** Aiming at the difficult in hardware realization of random measurement matrix, we construct a deterministic measurement matrix based on composite chaotic mapping. The composite chaotic mapping that based on Tent mapping and Logistic mapping, has stronger randomness and initial value sensitivity. Sampled the composite chaotic mapping sequence with large distance, and then do linear transformation to the sampling sequence. Finally, we construct the measurement matrix with the linear transformation result. We prove that the measurement matrix elements have enough statistically independent, and the measurement matrix can satisfies restricted isometry property (RIP) with large probability. The simulation result shows that our matrix has the similar performance to Gaussian random matrix, and better than Toeplitz deterministic measurement matrix and Logistic deterministic measurement matrix.

**Key words:** compressive sensing (CS); measurement matrix; chaotic mapping; restricted isometry property

### 1 引言

测量矩阵的构造是压缩感知技术的关键部分, 其性能对于测量值的获取和信号重构都具有决定性的作用. 测量矩阵主要分为随机性测量矩阵和确定性测量矩阵. 目前常用的随机性测量矩阵有高斯随机测量矩阵、伯努利测量矩阵等<sup>[1,2]</sup>, 这类矩阵已被证明满足 RIP 性质, 且与绝大部分信号不相关, 因此在相同的质量要求下只需较少的测量值即可实现, 而且构造简单, 因此可适用于压缩感知. 但是这类矩阵的元素具有不

确定性, 不能保证每次都能精确地恢复原始信号, 而且需要较大存储空间和较强计算能力, 不利于硬件实现. 目前常用的确定性测量矩阵从构造角度可分为<sup>[3]</sup>: ①基于有限域的测量矩阵, 代表性的为多项式测量矩阵<sup>[4]</sup>; ②基于编码的测量矩阵, 代表性的为 Toeplitz 确定性测量矩阵<sup>[5,6]</sup>; ③基于训练的测量矩阵, 代表性的为基于 ETF 的训练算法<sup>[7]</sup>; ④最大 Welch 界等式测量矩阵<sup>[8]</sup>. 确定性测量矩阵只需少量元素即可确定剩余的大部分元素, 因此所需的存储空间少, 而且由于其元素的确定性, 硬件实现也较随机性测量矩阵容易.

混沌运动具有“确定性系统的内在随机性”<sup>[9,10]</sup>,将其运用到压缩感知测量矩阵构造中,可使所构造矩阵具备“确定性中的随机性”.混沌序列的生成只需记忆一个初始值,较容易在物理电路中实现,因此可在实际应用中将其作为构造压缩感知确定性测量矩阵的一个重要方法.目前已有不少学者将混沌理论用于CS测量矩阵构造,文献[11]首次提出利用混沌序列构造出满足高斯分布的测量矩阵;文献[12]利用 Logistic 映射构造一种可行的测量矩阵;文献[13]提出一种由混沌序列获得确定性随机序列来构造观测矩阵的方法.这些基于混沌理论构造的CS测量矩阵,有些性能低于常用随机测量矩阵,有些不属于确定性测量矩阵,因此本文提出将 Logistic 映射和 Tent 映射相结合,产生一种随机性和敏感性更强的复合混沌映射,并依此构造性能更高的确定性测量矩阵.

## 2 基于复合混沌映射的测量矩阵构造

### 2.1 复合混沌映射构造

已知 Logistic 映射定义为:

$$x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n), 0 < \mu \leq 4, 0 \leq x_n \leq 1 \quad (1)$$

已知 Tent 映射定义为:

$$x_{n+1} = \alpha - 1 - \alpha |x_n|, -1 < x_n \leq 1, 1 < \alpha \leq 2 \quad (2)$$

Lyapunov 指数可有效刻画映像中相邻点相互分离的快慢或奇异吸引子中轨道对初始条件的敏感度,其值越大表明映射对初始条件越敏感,其定义为:

$$\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \ln |f'(x_n)| \quad (3)$$

将式(2)代入式(3),计算可知,当  $\alpha = 2$  时, Tent 映射迭代方程的 Lyapunov 指数最大,其混沌轨道对初值敏感性最强.因此,基于 Logistic 映射与 Tent 映射的特点,当  $\alpha = 2$  时,将式(3)产生的迭代数列  $x_{n+1}$  作为式(2)的初始值  $x_n$  进行复合迭代,得到新的映射:

$$x_{n+1} = 1 - 2\mu x_n (1 - x_n), 0 \leq x_n \leq 1, 0 < \mu \leq 4 \quad (4)$$

式(4)所表示的复合映射具有类抛物线型,通过对相图分析可知,该映射的相图顶点位于  $x_n = 0.5$  处的纵轴,且随不同的  $\mu$  值而改变,当  $1 \leq \mu \leq 2$  时,该复合映射才是单一的满映射,序列具有有界性,可进入混沌状态.式(4)可表示为:

$$x_{n+1} = 1 - 2\mu x_n (1 - x_n), 0 \leq x_n \leq 1, 1 \leq \mu \leq 2 \quad (5)$$

为了确定式(5)复合映射方程的最佳  $\mu$  值,由式(3)计算该复合映射的最大 Lyapunov 指数.计算可知,当  $\mu = 2$  时,该复合映射的 Lyapunov 指数最大,表明此时复合混沌映射具有更强的初值敏感性,混沌特性更明显.将  $\mu = 2$  代入式(5)可得复合映射方程为:

$$x_{n+1} = 1 - 4x_n (1 - x_n), 0 \leq x_n \leq 1 \quad (6)$$

通过计算还可以发现,在相同条件下,式(6)复合

混沌映射的 Lyapunov 指数大于 Logistic 映射和 Tent 映射,表示其初值敏感性更好,映射迭代的遍历性更强.

### 2.2 复合混沌映射特性分析

对于式(6)复合混沌映射,其一个特解为:

$$x_n = \cos^2(\pi\theta 2^{n-1}) = [1 - \cos(\pi\theta 2^n)]/2 \quad (7)$$

初始值  $x_0 = [1 + \cos(\pi\theta)]/2, \theta \in [0, 1]$  且服从均匀分布.

在构造测量矩阵之前,须对式(7)的统计特性、分布状态、相关度和基于采样间隔的统计独立特性等性质进行分析.令

$$z_n = \cos(\pi\theta 2^n) \quad (8)$$

则有:  $E(z_n) = \int_0^1 \cos(\pi\theta 2^n) d\theta = 0$ , 初始值,  $z_0 = \cos(\pi\theta)$ ,  $z_n \in [-1, 1]$ .

#### 2.2.1 统计特性

结合式(7)与式(8)可知,  $x_n = (1 + z_n)/2$ , 即  $z_n$  与  $x_n$  之间为线性关系,  $z_n$  中元素相互独立就表明  $x_n$  中元素相互独立.

#### 2.2.2 分布状态

由式(1)与式(6)可以看出,复合混沌映射与 Logistic 映射是拓扑共轭的,二者的迭代轨道有着相同的性质,故复合混沌映射所产生的混沌序列的概率分布密度与 Logistic 映射相同.已知 Logistic 离散系统所产生的混沌序列的概率分布密度函数为:  $\rho(x) = 1/\pi \sqrt{1-x^2}$ ,  $x \in (0, 1)$ .

#### 2.2.3 相关度

$z_n$  的相关特性由其  $m$  阶矩决定,即:

$$E(z_n^m) = \int_0^1 \cos^m(\pi\theta 2^n) d\theta = \begin{cases} 0, & \text{当 } m \text{ 为奇数} \\ 2^{-m} \binom{m}{m/2}, & \text{当 } m \text{ 为偶数} \end{cases} \quad (9)$$

式(11)的计算过程如下:

$$\begin{aligned} E(z_n^m) &= \int_0^1 \cos^m(\pi\theta 2^n) d\theta \\ &= \int_0^1 \cos^{m-1}(\pi\theta 2^n) / \pi 2^n d \sin(\pi\theta 2^n) \\ &= (m-1) \int_0^1 \cos^{m-2}(\pi\theta 2^n) d\theta - (m-1) \\ &\quad \cdot \int_0^1 \cos^m(\pi\theta 2^n) d\theta \end{aligned}$$

$$\text{即: } E(z_n^m) = \int_0^1 \cos^m(\pi\theta 2^n) d\theta = \frac{m-1}{m} \int_0^1 \cos^{m-2}(\pi\theta 2^n) d\theta$$

当  $m$  为奇数时:

$$\begin{aligned} E(z_n^m) &= \int_0^1 \cos^m(\pi\theta 2^n) d\theta \\ &= \frac{m-1}{m} \int_0^1 \cos^{m-2}(\pi\theta 2^n) d\theta \\ &= \frac{m-1}{m} \frac{m-3}{m-2} \frac{m-5}{m-4} \dots \frac{4}{5} \frac{2}{3} \int_0^1 \cos(\pi\theta 2^n) d\theta \end{aligned}$$

=0

当  $m$  为偶数时:

$$\begin{aligned} E(z_n^m) &= \int_0^1 \cos^m(\pi\theta 2^n) d\theta \\ &= \frac{m-1}{m} \int_0^1 \cos^{m-2}(\pi\theta 2^n) d\theta \\ &= \frac{m-1}{m} \frac{m-3}{m-2} \frac{m-5}{m-4} \dots \frac{5}{6} \frac{2}{4} \frac{1}{2} \\ &= 2^{-m} \binom{m}{m/2} \end{aligned}$$

2.2.4 统计独立性

一般情况下,由式(8)产生的序列之间不具备相互独立性.但是,由于序列组的生成依赖于采样间隔,因此通过改变采样间隔,使序列组具有高阶相关性,则能够证明它们之间统计独立.

**定理 1** 设  $Z = \{z_n, z_{n+1}, \dots, z_{n+k}, \dots\}$  是由式(8)迭代产生的一个序列,初始值  $z_0 = \cos(\pi\theta)$ ,采样间隔为正整数  $d$ ,则对于任意的正整数  $m_0 < 2^d$  和任意的正整数  $m_1 < 2^d$ ,有下式成立:

$$E(z_n^{m_0} z_{n+d}^{m_1}) = E(z_n^{m_0}) E(z_{n+d}^{m_1}) \quad (10)$$

证明

**Case 1** 如果  $m_0, m_1$  中至少有一个为奇数,则由式(9)可知,式(10)右边为 0. 式(10)左边为:

$$E(z_n^{m_0} z_{n+d}^{m_1}) = \int_{-1}^1 \rho(z_0) z_n^{m_0} z_{n+d}^{m_1} dz_0 \quad (11)$$

将  $\rho(z) = 1/\pi \sqrt{1-z^2}, z_0 = \cos(\pi\theta)$  代入式(11),得:

$$E(z_n^{m_0} z_{n+d}^{m_1}) = \int_0^1 \cos^{m_0}(2\pi\theta 2^n) \cos^{m_1}(2\pi\theta 2^{n+d}) d\theta \quad (12)$$

由于

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ \int_0^1 e^{i2\pi\theta k} d\theta = \delta(k) = \begin{cases} 0, & k \neq 0 \\ 1, & k = 0 \end{cases} \end{cases} \quad (13)$$

将式(13)代入式(12)可得:

$$E(z_n^{m_0} z_{n+d}^{m_1}) = 2^{-(m_0+m_1)} \sum_{\sigma} \delta\left(2^n \sum_{i=1}^{m_0} \sigma_{n_i} + 2^{n+d} \sum_{i=1}^{m_1} \sigma_{(n+d)_i}\right) \quad (14)$$

其中,  $\sigma_{n_i} = \pm 1$ .

当任意的正整数  $m_0 < 2^d, m_1 < 2^d$  时,对式(14)具体分析如下:

①当  $m_1$  为奇数,  $m_0$  为奇数或偶数时,由于

$$0 \leq \left| \sum_{i=1}^{m_0} \sigma_{n_i} \right| \leq m_0, 1 \leq \left| \sum_{i=1}^{m_1} \sigma_{(n+d)_i} \right| \leq m_1,$$

则

$$2^n \sum_{i=1}^{m_0} \sigma_{n_i} + 2^{n+d} \sum_{i=1}^{m_1} \sigma_{(n+d)_i} \neq 0.$$

②当  $m_1$  为偶数,  $m_0$  为奇数时,由于  $\sum_{i=1}^{m_0} \sigma_{n_i} \neq 0$ ,且

可能存在  $\sum_{i=1}^{m_1} \sigma_{(n+d)_i} = 0$ ,则

$$2^n \sum_{i=1}^{m_0} \sigma_{n_i} + 2^{n+d} \sum_{i=1}^{m_1} \sigma_{(n+d)_i} \neq 0$$

因此,可知式(10)左边为 0.

**Case 2** 如果  $m_0$  与  $m_1$  都为偶数,有

$$\begin{aligned} E(z_n^{m_0} z_{n+d}^{m_1}) &= \int_0^1 \cos^{m_0}(2\pi\theta 2^n) \cos^{m_1}(2\pi\theta 2^{n+d}) d\theta \\ &= 2^{-(m_0+m_1)} \binom{m_0}{m_0/2} \binom{m_1}{m_1/2} \\ &= 2^{-m_0} \binom{m_0}{m_0/2} 2^{-m_1} \binom{m_1}{m_1/2} \end{aligned}$$

对比于式(9),可知式(10)成立.

证毕.

由统计特性可知,  $z_n$  迭代产生的序列统计独立就代表  $x_n$  迭代产生的序列统计独立.

2.3 基于复合混沌映射的测量矩阵构造

令  $X(d, k, x_0) = \{x_n, x_{n+d}, \dots, x_{n+kd}\}$  表示以间隔  $d$  采样式(6)产生的混沌序列而得到的一个混沌序列集合,初始值  $x_0 = [1 + \cos(\pi\theta)]/2$ ,则  $z_k \in Z(d, k, z_0)$  是  $X(d, k, x_0)$  的一个正规化表示,即:  $z_k = 2x_{n+kd} - 1$ . 设所要构造的测量矩阵  $\Phi \in R^{M \times N}$ ,首先以长度  $k = MN$  采样生成复合混沌序列  $Z(d, k, z_0)$ ,然后按照此序列,一列一列地生成  $M \times N$  维测量矩阵  $\Phi$ ,可表示为式(15).

$$\Phi = S \begin{bmatrix} z_0 & \dots & z_{M(N-1)} \\ z_1 & \dots & z_{M(N-1)+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ z_{M-1} & \dots & z_{MN-1} \end{bmatrix} \quad (15)$$

其中,  $S$  为  $\Phi$  的标准化系数.可以看出,混沌矩阵  $\Phi$  为亚高斯分布矩阵.

由定理 1 可知,当  $d$  足够大时,  $z_n$  与  $z_{n+d}$  相互统计独立.本文取采样间隔  $d = 15$ ,即  $m_0, m_1$  小于 32768 时,  $E(z_n^{m_0} z_{n+d}^{m_1}) = E(z_n^{m_0}) E(z_{n+d}^{m_1})$  成立,可以近似认为复合混沌序列  $Z(d, k, z_0)$  统计独立,此时测量矩阵  $\Phi$  中元素的概率分布密度函数满足  $\rho(x)$ .

混沌系统具有显著的“伪随机性”,即可以由确定性规则产生不确定轨迹,将确定性与随机性有机地融合在一起.对于由式(6)复合混沌映射构造的确定性测量矩阵,只需确定产生确定性随机序列的方程和参数,式(15)所示矩阵的元素也随之确定,因此,在对矩阵进行存储时仅需存储方程和参数即可,节省了硬件存储空间.

下面将对式(15)所示的复合混沌映射测量矩阵  $\Phi$  满足约束等距特性进行证明.

## 2.4 约束等距性 (RIP) 验证

**定理 2** 对于由式 (15) 产生的混沌矩阵  $\Phi \in R^{M \times N}$ , 及任意的  $K$  稀疏信号  $u$  和常数  $\delta_k \in (0, 1)$ , 当  $K \leq O(M/\log(N/K))$  时, 矩阵  $\Phi$  能以高概率满足  $K$  阶约束等距性:

$$(1 - \delta_k) \|u\|_2^2 \leq \|\Phi_T u\|_2^2 \leq (1 + \delta_k) \|u\|_2^2 \quad (16)$$

由于定理 2 的证明需要用到 Johnson-Lindenstrauss 定理<sup>[14]</sup>, 因此先介绍 Johnson-Lindenstrauss 定理.

**Johnson-Lindenstrauss 定理** 设随机亚高斯矩阵  $\Phi \in R^{M \times N}$  的任意列组成的子矩阵为  $\Phi_T$ , 索引集个数为  $|T|$ , 常数  $\delta_k \in (0, 1)$ , 对任意的向量  $x \in R^{|T|}$ , 随机变量  $\|\Phi_T x\|_2^2$  高度集中于  $\|x\|_2^2$ , 即存在

$$P(|\|\Phi_T x\|_2^2 - \|x\|_2^2| \geq \delta \|x\|_2^2) \leq 2e^{-c(\delta_k)M} \quad (17)$$

其中,  $c(\delta_k) = \min\{c_1(\delta_k), c_2(\delta_k)\}$ ,  $c_1(\delta_k) = \frac{\delta_k^2}{4} - \frac{\delta_k^3}{6}$ ;

$$c_2(\delta_k) = h(1 - \delta_k)(1 - h + 3h/2);$$

$$h = \frac{-2 - \delta_k + \sqrt{4 + 8\delta_k - 5\delta_k^2}}{3(1 - \delta_k)}.$$

**证明**

对于定理 2 中的任意  $K$  稀疏信号  $u$ ,  $T$  表示  $u$  中非零元素的位置索引, 且索引集个数  $|T| = K, s \leq K \leq N$ ,  $\Phi_T$  为由式 (15) 构造的矩阵  $\Phi$  任取  $|T|$  列组成的子矩阵, 显然,  $\Phi_T$  满足式 (17) 所示定理性质.

令  $\varepsilon_s = \{|\|\Phi_T u\|_2^2 - \|u\|_2^2| \geq \delta \|u\|_2^2\}$  表示式 (16) 的一个互补事件,  $\varepsilon$  则为其所有互补事件的集合  $\varepsilon = \cup_{s=1}^K \varepsilon_s$ , 那么式 (16) 满足约束等距性的概率为:

$$\begin{aligned} & P(|\|\Phi_T u\|_2^2 - \|u\|_2^2| \leq \delta_k \|u\|_2^2) \\ &= 1 - P(\varepsilon) \\ &\geq 1 - 2e^{-c(\delta_k)M} \sum_{s=1}^K \binom{N}{s} \\ &\geq 1 - 2e^{-c(\delta_k)M} K \binom{eN}{K} \\ &= 1 - 2\exp[\log K - c(\delta_k)M + K[\log(N/K) + 1]] \end{aligned} \quad (18)$$

令固定常数  $C_1 > 0$ , 且  $C_1 M \geq K \log \frac{N}{K}$ , 代入式 (18), 有:

$$\begin{aligned} & P(|\|\Phi_T u\|_2^2 - \|u\|_2^2| \leq \delta_k \|u\|_2^2) \\ &\geq 1 - 2\exp[\log K - c(\delta_k)M + K[\log(N/K) + 1]] \\ &\geq 1 - 2\exp[\log K - c(\delta_k)M + C_1 M + K] \end{aligned} \quad (19)$$

令  $C_2 \leq c(\delta_k) - C_1 \left[ \frac{1 + (\log K)/K}{\log(N/K)} + 1 \right]$ , 并选取足够小的  $C_1$  保证  $C_2 > 0$ . 则下述不等式成立:

$$\begin{aligned} -C_2 M &\geq -c(\delta_k)M + C_1 M \left[ \frac{1 + (\log K)/K}{\log(N/K)} + 1 \right] \\ &\geq -c(\delta_k)M + C_1 M + K \log(N/K) \frac{1 + (\log K)/K}{\log(N/K)} \end{aligned}$$

$$= -c(\delta_k)M + C_1 M + K + \log K \quad (20)$$

将式 (20) 代入式 (19) 可得:

$$P(|\|\Phi_T u\|_2^2 - \|u\|_2^2| \leq \delta_k \|u\|_2^2) \geq 1 - 2e^{-C_2 M} \quad (21)$$

式 (21) 说明, 本文所构造的测量矩阵  $\Phi$  能以大于  $1 - 2e^{-C_2 M}$  的高概率满足约束等距性.

## 3 实验及分析

为验证本文构建的式 (15) 复合混沌测量矩阵  $\Phi$  在压缩感知信号重构中的性能, 在 3.1 节研究其对一维稀疏信号与二维图像的重构效果; 在 3.2 节将其与具有代表性的高斯随机测量矩阵、Toeplitz 确定性测量矩阵以及 Logistic 映射测量矩阵进行性能对比分析; 在 3.3 节研究混沌初值对复合混沌测量矩阵性能的影响. 重构方法采用本文作者之前提出的基于复合混沌-遗传算法的 MP 重构方法 (LT-GA-MP)<sup>[15]</sup>. 实验条件为: 计算机配置 AMD Athlon (tm) II X2 255 processor 3.11GHz, 内存 2GB, Windows XP sp3 操作系统, 采用 Matlab7.10 编程.

### 3.1 复合混沌测量矩阵重构性能仿真

(1) 一维信号实验. 仿真实验采用长度为 512 的原始信号, 如图 1 所示. 该信号由 6 个频率分别为 50Hz、100Hz、150 Hz、200Hz、300Hz、400Hz 的单频信号叠加而成, 采样频率为 800Hz. 测量矩阵为本文复合混沌测量矩阵. 设复合混沌映射迭代初始值  $x_0 = 0.4$ , 采样间隔  $d = 15$ , 此时  $m_0, m_1$  小于 32768. 定义重构误差为  $\varepsilon$ , 如式 (22) 所示,  $x$  为原始信号,  $\hat{x}$  为重建信号.

$$\varepsilon = \frac{\|\hat{x} - x\|_2}{\|x\|_2} \quad (22)$$

图 2 为采用本文复合混沌测量矩阵对图 1 原始信号进行重构的结果, 迭代次数为 115 次. 通过式 (22) 计算平均重构误差约为  $1.6711 \times 10^{-14}$ .

(2) 二维图像实验. 仿真实验采用图库中提供的标准  $256 \times 256$  的 Peppers 图像与  $512 \times 512$  的 Lena 图像, 如图 3 所示. 测量矩阵为本文复合混沌测量矩阵. 设压缩比  $M/N$  为 0.5, 复合混沌映射迭代初始值  $x_0 = 0.4$ , 采样间隔  $d = 15$ . 峰值信噪比 (PSNR) 定义为:

$$\text{PSNR} = 20 \log \frac{\|x\|_2}{\|x - \hat{x}\|_2} \quad (23)$$

采用本文复合混沌测量矩阵重构后的 Peppers 图像与 Lena 图像如图 4 所示. 通过式 (23) 计算重构后 Peppers 图像与 Lena 图像的 PSNR 分别为 29.6246dB 与 32.3518dB.

### 3.2 与相关测量矩阵性能对比分析

下文进行性能对比的四种测量矩阵分别为: 高斯随机测量矩阵、Toeplitz 确定性测量矩阵、Logistic 映射测量矩阵以及本文复合混沌测量矩阵.

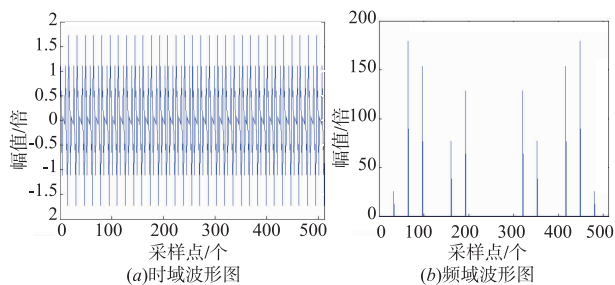


图1 原始混合频率信号波形

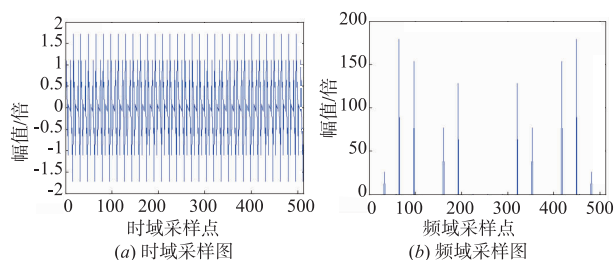


图2 复合混沌测量矩阵重构信号波形



图3 Peppers与Lena原始图像



图4 重构的Peppers与Lena图像

(1) 一维时域信号重构

原始时域稀疏信号长度  $N = 512$ , 复合混沌映射迭代初始值  $x_0 = 0.4$ , 采样间隔  $d = 15$ . 考虑随机矩阵的不确定性带来的误差, 实验结果为 100 次实验后取得的均值.

当固定测量次数  $M = 128$ , 稀疏度  $K$  的变化范围为  $[0, 50]$  时, 四种测量矩阵所对应的重构成功率随信号稀疏度  $K$  变化情况如图 5 所示. 定义重构成功率为  $\eta$ , 如式(24)所示,  $R_{\text{正确}}$  为重构成功次数,  $R_{\text{总}}$  为重构总次

数. 设重构成功标准为  $\varepsilon \leq 10^{-6}$ . 可以看出, 本文复合混沌测量矩阵与高斯随机测量矩阵的重构成功率总体上稍高于 Toeplitz 测量矩阵和 Logistic 映射测量矩阵.

$$\eta = \frac{R_{\text{正确}}}{R_{\text{总}}} \quad (24)$$

当固定稀疏度  $K = 25$ , 测量次数  $M$  的变化范围为  $[50, 250]$  时, 四种不同测量矩阵所对应的重构误差  $\varepsilon$  的变化情况如图 6 所示. 可以看出, 本文复合混沌测量矩阵与高斯随机测量矩阵的重构误差接近, 且都略小于 Toeplitz 测量矩阵和 Logistic 映射测量矩阵.

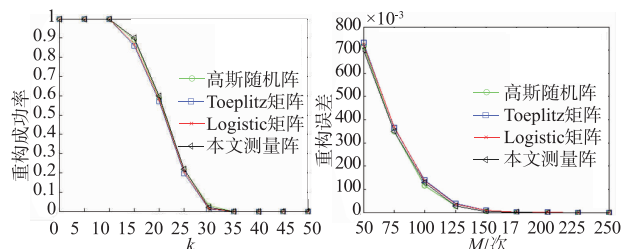


图5 不同测量矩阵对应的重构成功率随信号稀疏度K变化  
图6 不同测量矩阵对应的重构误差随信号测量次数M变化

(2) 二维图像重构

仿真实验采用图 3 所示  $512 \times 512$  的 Lena 图像, 设复合混沌映射迭代初始值  $x_0 = 0.4$ , 采样间隔  $d = 15$ . 当压缩比  $M/N$  从 0.2 变化为 0.8 的过程中, 采用四种测量矩阵重构 Lena 图像的效果对比结果如图 7 所示. 可以看出, 本文复合混沌测量矩阵与高斯随机测量矩阵的重构效果接近, 且都高于 Toeplitz 测量矩阵和 Logistic 映射测量矩阵. 图 8 为采用四种测量矩阵重构 Lena 图像时, 各自的重构时间对比结果. 可以看出, 随着压缩比的增加, 四种测量矩阵的重构时间迅速增加, 但四者之间相差不多.

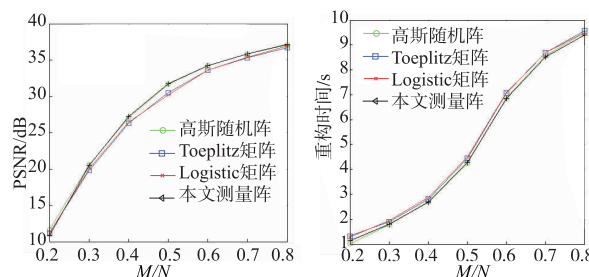


图7 压缩比变化时四种测量矩阵重构Lena图像效果对比  
图8 压缩比变化时四种测量矩阵重构Lena图像时间对比

总体来看, 本文复合混沌测量矩阵与高斯随机测量矩阵对一维时域信号或二维图像信号的重构效果相近, 且都高于 Toeplitz 确定性测量矩阵和 Logistic 映射测量矩阵.

3.3 混沌初值对测量矩阵的影响分析

采用长度  $N = 512$  原始一维时域稀疏信号, 测量矩阵为本文复合混沌映射测量矩阵. 设复合混沌映射迭

代初值  $x_0 \in \{0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9\}$ , 测量次数  $M$  的变化范围为  $[50, 250]$ , 稀疏度  $K$  的变化范围为  $[0, 50]$ , 采样间隔  $d = 15$ . 实验结果分别如图 9、图 10 所示. 图 9 为改变复合映射迭代初值  $x_0$ , 信号重构误差随测量次数  $M$  的变化情况. 图 10 为改变复合映射迭代初值  $x_0$ , 重构成功率随稀疏度  $K$  的变化情况. 可以看出, 无论改变稀疏度  $K$  或改变测量次数  $M$ , 复合映射迭代初值  $x_0$  的变化都不会对信号重构结果产生影响.

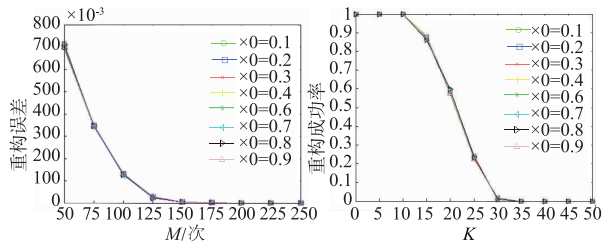


图9 不同初值对应的重构误差随测量次数  $M$  的变化

图10 不同初值对应的重构成功率随稀疏度  $K$  的变化

#### 4 结论

针对压缩感知常用随机测量矩阵硬件实现困难的不足, 本文提出一种基于复合混沌映射的确定性测量矩阵构造方法, 并对其可行性进行理论与实验证明.

(1) 在复合混沌测量矩阵  $\Phi$  的构造部分, 基于 Logistic 映射和 Tent 映射构造随机性和初值敏感性更强的复合混沌映射, 对此复合混沌映射迭代序列完成大间隔采样后进行线性变换, 将得到的结果作为拟构造测量矩阵  $\Phi$  中的元素, 并从理论上证明了该测量矩阵  $\Phi$  满足不相关性和约束等距性.

(2) 在仿真实验部分, 将矩阵  $\Phi$  与高斯随机测量矩阵、Toeplitz 确定性测量矩阵以及 Logistic 映射测量矩阵从一维时域信号和二维图像两种情况进行性能对比分析. 结果表明, 矩阵  $\Phi$  的重构效果优于 Toeplitz 确定性测量矩阵以及 Logistic 映射测量矩阵, 与高斯随机测量矩阵相仿. 证明了复合混沌映射迭代初值的变化对矩阵  $\Phi$  的性能没有影响.

#### 参考文献

- [1] Candès E J, Romberg J, Tao T. Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements [J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 2006, 59(8): 1207 - 1223.
- [2] Donoho D L, Tsaig Y. Extensions of compressed sensing [J]. Signal Processing, 2006, 86(3): 533 - 548.
- [3] 王强, 李佳, 沈毅. 压缩感知中确定性测量矩阵构造算法综述 [J]. 电子学报, 2013, 41(10): 2041 - 2050.
- [4] Wang Qiang, Li Jia, Shen Yi. A survey on deterministic measurement matrix construction algorithms in compressive sensing [J]. Acta Electronica Sinica, 2013, 41(10): 2041 - 2050. (in Chinese)
- [5] Devore R A. Deterministic construction of compressed sensing matrices [J]. Journal of Complexity, 2007, 23(4-6): 918 - 925.
- [6] Haupt J. Toeplitz compressed sensing matrices with applications to sparse channel estimation [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2010, 56(10): 5862 - 5875.
- [7] 张成, 杨海蓉, 韦穗. 基于随机间距稀疏 Toeplitz 测量矩阵的压缩传感 [J]. 自动化学报, 2012, 38(8): 1362 - 1369.
- [8] Zhang Cheng, Yang Hai-rong, Wei Sui. Compressive sensing based on deterministic sparse Toeplitz measurement matrices with random pitch [J]. Acta Automatica Sinica, 2012, 38(8): 1362 - 1369. (in Chinese)
- [9] Xu J, Pi Y, Cao Z. Optimized projection matrix for compressive sensing [J]. EURASIP Journal on Advances in Signal Processing, 2010, (2): 1 - 8.
- [10] Hong S, Park H, Shin B, et al. A new performance measure using k-set correlation for compressed sensing matrices [J]. IEEE Signal Processing Letter, 2012, 19(3): 143 - 146.
- [11] Santos C. Reliability-redundancy optimization by means of a chaotic differential evolution approach [J]. Chaos Solitons and Fractals, 2009, 41(2): 594 - 602.
- [12] Wang F, Dai Y S, Wang S S. Chaos-genetic algorithm based on the cat map and its application on seismic wavelet estimation [A]. International Workshop on Chaos-Fractals Theories and applications [C]. Shenyang, China: IEEE, 2009. 112 - 116.
- [13] Nguyen L T, Van P D, Hussain Z M, et al. Compressed sensing using chaos filters [A]. Telecommunication Networks and Applications Conference [C]. Adelaide, SA, Australasian; Australasian Telecommunication Networks & Applications Conference, 2008. 219 - 223.
- [14] Yu L, Barbot J P, Zheng G, Sun H. Compressive sensing with chaotic sequence [J]. Signal Processing Letters, 2010, 17(8): 1 - 4.
- [15] 王侠, 王开, 王青云, 等. 压缩感知中的确定性随机观测矩阵构造 [J]. 信号处理, 2014, 30(4): 436 - 442.
- [16] Wang Xia, Wang Kai, Wang Qing-yun, et al. Deterministic random measurement matrices construction for compressed sensing [J]. Journal of Signal Processing, 2014, 30(4): 436 - 442. (in Chinese)
- [17] Johnson W, Lindenstrauss J. Extensions of Lipschitz maps into a Hilbert space [J]. Contemporary Mathematics, 1984, 26: 189 - 206.

- [15] 周伟, 景博, 黄以锋, 等. 基于 CS 的机载分簇型 WSN 数据采集方法[J]. 通信学报, 2015, 36(5): 1-10.  
Zhou Wei, Jing Bo, Huang Yi-feng, et al. CS-Based data collection method for airborne clustering WSN[J]. Journal on Communications, 2015, 36(5): 1-10. (in Chinese)

#### 作者简介



周 伟 男, 1984 年生于陕西西安, 空军工程大学博士研究生, 主要研究方向为现代检测与传感网络技术, 压缩感知, 故障诊断.  
E-mail: zwz-kgy@139.com



景 博 女, 1965 年生于河北邯郸, 空军工程大学教授, 主要研究方向为故障预测与健康管理, 可测试性设计, 传感器网络, 数据融合.  
E-mail: jingbo\_sensor@163.com



张 航 男, 1990 年生于陕西西安, 北京机电工程研究所助理工程师, 主要研究方向为人工智能、机器学习、图像信息融合.  
E-mail: zhh0993@163.com



黄以锋 男, 1982 年生于湖南耒阳, 空军工程大学讲师, 主要研究方向为现代检测与传感网络技术, 可测试性设计, 故障诊断.  
E-mail: huangyiff@126.com



李 娟 女, 1981 年生于山西长治, 空军工程大学博士研究生, 主要研究方向为故障预测与健康健康管理.  
E-mail: daidaiquanquan123@126.com